3.3. Chuỗi Fourier

Trong các bài toán kỹ thuật, các biểu diễn tín hiệu… ta thường gặp các hiện tượng tuần hoàn, dĩ nhiên biểu diễn chúng là các hàm tuần hoàn. Hàm tuần hoàn đơn giản nhất có dạng

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)\,, n = 1,2,\ldots$$

chúng biểu diễn các dao động điều hòa có chu kỳ $T = 2\pi$ và biên độ A_n.

Tổng hai hàm dao động là một hàm dao động, qui nạp lên tổng các hàm dao động là một hàm dao động. Vấn đề đặt ra nếu có một hàm $g(t)$ tuần hoàn chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$, có thể khai triển được dưới dạng

$$g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\,(n\omega t + \varphi_n)$$

được hay không?

Đặt $t = \frac{x}{\omega}$, ta có

$$g(t) = g\left(\frac{x}{\omega}\right) := f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\,(nx + \varphi_n)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\sin nx cos\varphi_n + sin\varphi_n cosnx)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin\varphi_n cosnx + A_n cos\varphi_n \sin nx$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n sinnx.$$

Trong đó, a_0=2A, a_n=$A_n$sin φ_n, b_n=$A_n$cosφ_n, $f(x)$ có chu kỳ 2π.

3.3.1. Khái niệm

a) Chuỗi lượng giác

Chuỗi lượng giác là chuỗi hàm số có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (3.7)$$

Trong đó a_0, a_n, b_n là các hằng số. Số hạng tổng quát $u_n(x) = a_n cosnx + b_n sinnx$ là một hàm số tuần hoàn chu kỳ $\frac{2\pi}{n}$, liên tục và khả vi mọi cấp. Nếu chuỗi *(3.7)* hội tụ thì tổng của nó là một hàm số tuần hoàn chu kỳ 2π.

b) Chuỗi Fourier

Bổ đề:

Ta thừa nhận một số kết quả sau đây để xây dựng công thức chuỗi Fourier chứ không chứng minh. Với $\forall p,k\in\mathbb{Z}$ ta có các hệ thức:

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinkxdx = 0 \tag{3.8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} coskxdx = 0\ (k \neq 0) \tag{3.9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} coskxsinpxdx = 0 \tag{3.10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} coskxcospxdx = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \pi, & k = p \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinkxsinpxdx = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \pi, & k = p \end{cases} \tag{3.12}$$

Giả sử hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, khả tích trên đoạn $[-\pi, \pi]$ có thể khai triển được trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thành chuỗi lượng giác dạng:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx) \tag{3.13}$$

Để tính a_0, ta lấy tích phân từ $-\pi$ đến π của đẳng thức *(3.13)* ta có

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx)\right]dx \tag{3.14}$$

Từ các công thức *(3.8)* và *(3.9)*, suy ra

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0.\pi,$$

vậy,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{3.15}$$

Để tính a_n, ta nhân đẳng thức *(3.13)* với *coskx* rồi lấy tích phân từ $-\pi$ đến π kết hợp các công thức *(3.11)* và *(3.12)* ta suy ra

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx \quad (n = 1,2,\dots) \tag{3.16}$$

Để tính b_n, ta nhân đẳng thức *(3.13)* với sinkx rồi lấy tích phân từ -π đến π kết hợp các bổ đề *(3.11)* và *(3.13)* ta suy ra

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnxdx \quad (n = 1,2,\ldots) \qquad (3.17)$$

Các hệ số $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ được xác định theo các công thức *(3.15), (3.16), (3.17)* được gọi là các hệ số Fourier của hàm số $f(x)$. Chuỗi lượng giác trong đó các hệ số xác định như trên được gọi là chuỗi Fourier của hàm $f(x)$.

Vấn đề đặt ra bây giờ với điều kiện nào chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ và có tổng bằng $f(x)$, tức là với điều kiện nào thì hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier.

c) Định lý Dirichlet

Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, đơn điệu từng khúc (có hữu hạn điểm gián đoạn loại 1) và bị chặn trên đoạn [-π,π] khi đó chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ hội tụ tại mọi điểm hàm liên tục. Tổng $S(x)$ của chuỗi bằng $f(x)$ tại những điểm hàm liên tục, tại những điểm gián đoạn loại 1 x_0 ta có $S(x_0) = \frac{f(x_{0+})+f(x_{0-})}{2}$.

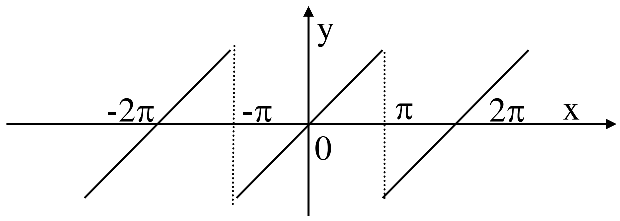
Các điều kiện nêu trong định lý này được gọi là điều kiện Dirichlet.

Ví dụ 3.18:

Cho hàm số $f(x)=x$; $x\in[-\pi, \pi]$; có chu kỳ 2π. Khai triển hàm trên thành chuỗi Fourier.

Hàm số đã cho thoả mãn các điều kiện của định lý Dirichlet nên khai triển được thành chuỗi Fourier.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right] = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Vậy,

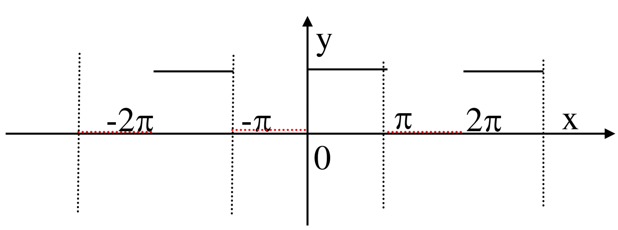
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1} sinnx.$$

Tại $x = \pm\pi$, tổng của chuỗi bằng 0.

Ví dụ 3.19:

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ 3 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ có chu kỳ 2π. Khai triển hàm trên thành chuỗi Fourier.

Hàm số đã cho thoả mãn các điều kiện của định lý Dirichlet nên khai triển được thành chuỗi Fourier.



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 3dx = \frac{1}{\pi}3x\Big|_0^{\pi} = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx = \frac{3}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 3\sin nx dx = -\frac{3}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{3}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

Vậy, $f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n\pi}(1 - cosn\pi)sinnx.$

Tại $x = \pm\pi$, tổng của chuỗi bằng $\frac{3}{2}$.

- *Khai triển hàm chẵn có chu kỳ 2π* (thoả mãn các điều kiện định lý *Dirichlet*)

Khi *f(x)* là hàm chẵn thì *f(x).sinnx* là hàm lẻ nên $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx = 0\ \forall n$, vậy chuỗi Fourier chỉ còn lại các hệ số a_0 và a_n.

Ta có:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx$$

Khi đó chuỗi Fourier của hàm *f(x)* có thể viết lại:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cosnx \qquad (3.18)$$

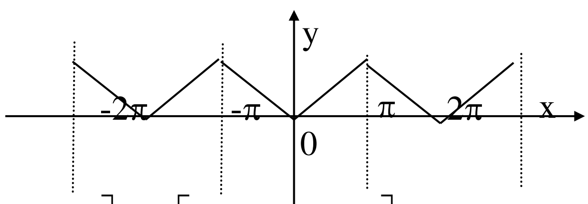
Chuỗi *(3.18)* còn được gọi là khai triển hàm *f(x)* dạng toàn *cosin*.

Ví dụ 3.20:

Khai triển Fourier của hàm *f(x)*=|*x*| trên đoạn [-π,π]; hàm có chu kỳ 2π.

Hàm trên thoả mãn các điều kiện của định lý Dirichlet nên khai triển được thành chuỗi Fourier.

Vì *f(x)* là hàm chẵn nên $b_n=0\ \forall n$;



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}x^2\Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

Hàm *f*(*x*) khai triển thành chuỗi Fourier:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)\cos nx$$

- *Khai triển hàm có chu kỳ bất kỳ (2l)*

Giả sử hàm $f(x)$ có chu kỳ $2l$, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn $[-l, l]$ trong đó l là giá trị dương bất kỳ, khai triển Fourier của hàm $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x)$$

(3.19)

Với, $a_0 \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$ *(3.20)*

$$a_n = \frac{1}{l}\sum_{-l}^{l} f(x)cos\frac{n\pi}{l}xdx \ (\forall n = 1,2,\dots) \quad (3.21)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\frac{n\pi}{l}xdx \ \ (\forall n = 1,2,\dots) \quad (3.22)$$

Ví dụ 3.21:

Cho hàm $f(x) = \begin{cases} -2 & -4 \le x < 0 \\ 2 & 0 \le x < 4 \end{cases}$ có chu kỳ $2l=8$ ($l=4$)

Khai triển hàm thành chuỗi Fourier.

Giải:

Sử dụng các công thức tính hệ số *(3.20), (3.21), (3.22)*:

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)cos\frac{n\pi}{4}xdx = 0$$

(vì *f(x)* là hàm lẻ nên $f(x).cos\frac{n\pi}{4}x$ cũng là hàm lẻ).

$$b_n = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)sin\frac{n\pi}{4}xdx = \frac{2}{4}\int_{0}^{4} 2sin\frac{n\pi}{4}xdx = -\frac{4}{n\pi}cos\frac{n\pi}{4}x\Big|_0^4$$

$$= -\frac{4}{n\pi}(cosn\pi - 1).$$

Vậy chuỗi Fourier của hàm *f(x)*:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(1 - cosn\pi)sin\frac{n\pi}{4}x.$$

3.3.2. Khai triển hàm bất kỳ thành chuỗi Fourier

Giả sử $f(x)$ là hàm số thoả mãn các điều kiện của định lý Dirichlet trên đoạn $[a, b]$. Muốn khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta xây dựng hàm tuần hoàn $g(x)$ có chu kỳ lớn hơn hay bằng độ dài đoạn $[a, b]$ sao cho:

$$g(x)=f(x) \ \forall x\in [a, b]$$

Nếu hàm số *g(x)* có thể khai triển được thành chuỗi Fourier thì tổng của chuỗi bằng $f(x)$ với mọi x thuộc $[a, b]$, trừ tại những điểm hàm số gián đoạn.

Rõ ràng chúng ta có nhiều cách để xây dựng hàm *g(x)* như vậy. Với mỗi hàm số $g(x)$ ta có một chuỗi Fourier tương ứng, do đó ta có nhiều chuỗi Fourier biểu diễn hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$. Nếu $f(x)$ là hàm chẵn, thì chuỗi Fourier chỉ gồm những hàm số *cosin* (ta gọi là chuỗi toàn *cosin*); nếu $f(x)$ là hàm lẻ, thì chuỗi Fourier chỉ gồm những hàm số *sin* (ta gọi là chuỗi toàn *sin*).

Ví dụ 3.22:

Cho hàm $f(x) = \frac{x}{3}$ với $0<x<2$, khai triển hàm thành chuỗi Fourier.

Giải:

Ta khai triển Fourier của hàm ở dạng toàn *cosin.*

Xây dựng hàm *g(x)* như sau:

$g(x) = \frac{1}{3}|x|$, $x\in(-2, 2)$, có chu kỳ $2l=4$.

Rõ ràng *g(x)* là một hàm chẵn và $g(x)=f(x)$ $\forall x\in(0,2)$. *g(x)* là hàm chẵn nên $b_n=0$;

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2}\frac{1}{3}xdx = \left.\frac{x^2}{6}\right|_0^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\cos\frac{n\pi}{2}xdx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2}\frac{1}{3}x\cos\frac{n\pi}{2}xdx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left.\frac{2}{n\pi}xsin\frac{n\pi}{2}x\right|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi}{2}xdx\right] = \frac{1}{3}.\frac{2}{n\pi}.\left.\frac{2}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2}x\right|_0^2 = \frac{4}{3n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

vậy chuỗi $g(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi}{2}x$.

Ta cũng có thể xem trong khoảng (0, 2):

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi}{2}x \ .$$